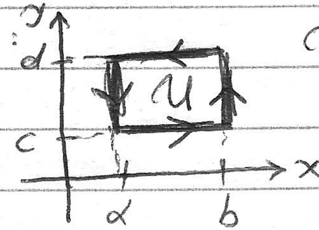
12/05/16 : **Λύση** :



$\partial U = ([a,b]\times\{c\}) \cup (\{b\}\times[c,d]) \cup ([a,b]\times\{d\}) \cup (\{a\}\times[c,d])$

$\Rightarrow$ Το ∂U μπορεί να θεωρηθεί ως εικόνα της καμπύλης

$\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3 \oplus \gamma_4$

$\gamma_1(t) = (a,c) + t((b,c)-(a,c)),\ t\in[0,1]$

$\gamma_2(t) = (b,c) + t((b,d)-(b,c))\ \ t\in[0,1]$

$\gamma_3(t) = (b,d) + t((a,d)-(b,d))$ -״-

$\gamma_4(t) = (a,d) + t((a,c)-(a,d)),\ t\in[0,1] \Rightarrow$

$$\Rightarrow L(\partial U) = \sum_{i=1}^{4} L(\gamma_i) = \sum_{i=1}^{4} \int \|\gamma_i'(t)\| dt =$$

$$= (b-a) + (d-c) + |a-b| + |c-d| = 2(b-a) + 2(d-c).$$

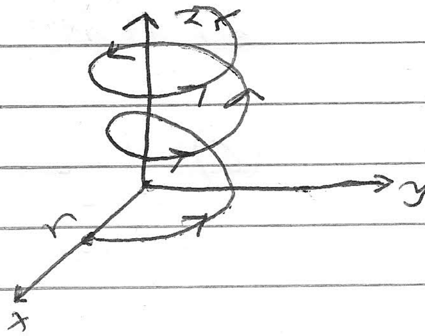
Ασκ. 66 : $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχώς διαφορίσιμη.

Η $\bar\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$, $\bar\gamma(t) = (t, f(t))$ είναι C^1 με

$\bar\gamma'(t) = (1, f'(t)) \Rightarrow \|\bar\gamma'(t)\| = \sqrt{1+(f'(t))^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow L(\bar\gamma)=\int_a^b \sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt$

<u>Άσκηση 7.1</u>: $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, $\bar\gamma(t)=(r\cos t, r\sin t, ct)$, $c>0$
ελικοειδής καμπύλης. Ποιο
το $L(\bar\gamma)$ στο $[0,T]$



$\bar\gamma'(t)=(-r\sin t, r\cos t, c)\Rightarrow$
$\Rightarrow\|\bar\gamma'(t)\|=\sqrt{r^2+c^2}$

Άρα $L(\bar\gamma|_{[0,T]})=\int_0^T\|\gamma'(t)\|dt=(\sqrt{r^2+c^2})\cdot T$

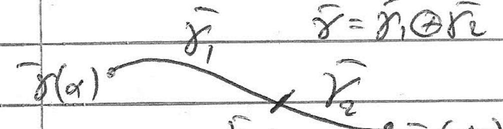
Επικαμπύλια Ολοκληρώματα (πραγματικής συνάρτησης ως προς μήκος καμπύλης)

<u>Ορισμός</u>: Έστω $\bar\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ C^1 καμπύλη και $f:\bar\gamma([a,b])\to\mathbb{R}$ συνεχής. Τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ως προς μήκος καμπύλης ορίζεται ως: $\int_\gamma f\,ds := \int_a^b f(\bar\gamma(t))\|\bar\gamma'(t)\|dt$

Ειδικότερα για $f\equiv 1 \Rightarrow \int_\gamma 1\,ds=\int_a^b\|\bar\gamma'(t)\|dt=L(\bar\gamma)$

<u>Παρατήρηση</u>: Συνάρτηση Μήκους Καμπύλης: $s(t)=\int_0^t\|\bar\gamma'(z)\|dz \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{ds}{dt}(t)=\|\bar\gamma'(t)\|\Leftrightarrow ds(t)=\|\bar\gamma'(t)\|dt$

άρα $\int_a^b f(\bar\gamma(t))\|\bar\gamma'(t)\|dt=\int_{s(0)=0}^{s(b)=L(\bar\gamma)} f(\bar\gamma(s^{-1}(s(t))))\,ds(t)=\int_{s(0)=0}^{s(b)=L(\bar\gamma)} f(\bar\gamma\circ s^{-1})(s)\,ds$



<u>Πρόταση</u>: Έστω $\bar\gamma=\bar\gamma_1\oplus\bar\gamma_2:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ ($\subseteq\mathbb{R}^n$) C^1, $f,g:\bar\gamma([a,b])\to\mathbb{R}$ συνεχείς και $\varphi:[A,B]\to[a,b]$ C^1 παραμ. μετασχ.

Τότε: (α) $\boxed{\int_{\gamma\circ\varphi} f\,ds=\int_\gamma f\,ds}$

(*) Τα επικ. ολ/τα είναι αναλλοίωτα κάτω από C^1 παραμ. μετασχ.

$$\int_{\bar\gamma\circ\varphi} f\,ds = \int_A^B f\big(\underbrace{(\bar\gamma\circ\varphi)(\tau)}\big)\,\|\bar\gamma'(\varphi(\tau))\,\varphi'(\tau)\|\,d\tau$$

$$\bar\gamma(\varphi(\tau)) = \|\bar\gamma'(\varphi(\tau))\|\,|\varphi'(\tau)|$$

(β) $\displaystyle\int_{\bar\gamma}(\lambda f+\mu g)\,ds = \lambda\int_{\bar\gamma} f\,ds + \mu\int_{\bar\gamma} g\,ds$

(γ) $\displaystyle\int_{\bar\gamma_1\oplus\bar\gamma_2} f\,ds = \int_{\bar\gamma_1} f\,ds + \int_{\bar\gamma_2} f\,ds$

(δ) $\displaystyle\left|\int_{\bar\gamma} f\,ds\right| \le \|f\|_\infty\, L(\bar\gamma)$ με $\|f\|_\infty = \max\{|f(\bar x)|,\ \bar x\in\bar\gamma([a,b])\}$

$$\left|\int_a^b f(\bar\gamma(t))\,\|\bar\gamma'(t)\|\,dt\right| \le \int_a^b |f(\bar\gamma(t))|\,\|\bar\gamma'(t)\|\,dt$$

<u>Ορισμός</u>: Έστω $\bar\gamma_1\oplus\bar\gamma_2\oplus\ldots\oplus\bar\gamma_k=\bar\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ κατά τμήματα C^1, ~~[illegible]~~ $f:\bar\gamma([a,b])\to\mathbb{R}$ συνεχής, τότε $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{\bar\gamma} f\,ds = \sum_{i=1}^{k}\int_{\bar\gamma_i} f\,ds$$

<u>Επίσης</u>: αν $\bar\gamma$: απλή/απλή κλειστή με $\bar\gamma([a,b])=C$ τότε γράφουμε και: $\displaystyle\int_C f\,ds := \int_{\bar\gamma} f\,ds$

<u>Παράδειγμα</u>: Υπολ. το επικ. ολ/μα ως προς μήκος καμπύλης $\displaystyle\int_{\bar\gamma}\underbrace{(x+y)}_{f(x,y)}\,ds$, $\bar\gamma(t)=(\cos t,\sin t)$, $t\in[0,\pi]$

<u>Λύση</u>:

$$=\int_0^\pi \underbrace{f(\bar\gamma(t))}_{\cos t+\sin t}\,\underbrace{\|\bar\gamma'(t)\|}_{=1}\,dt = \int_0^\pi(\cos t+\sin t)\,dt = .$$

Επικαμπύλια Ολοκληρώματα Διανυσματικών Πεδίων

<u>Ορισμός</u>: Έστω $\bar\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, C^1 και $\bar f:\overbrace{\bar\gamma([a,b])}^{\subseteq\mathbb{R}^n}\to\mathbb{R}^n$ συνεχής. Τότε:

$$\boxed{\int_{\bar\gamma}\bar f\cdot d\bar x := \int_a^b \bar f(\bar\gamma(t))\cdot\bar\gamma'(t)\,dt} \longrightarrow$$

ονομάζεται επικαμπ. ολ/μα (επί του δίκου πεδίου $\bar{f}$) κατά μήκος της $\bar{\gamma}$

Συμβολισμός: Αν $f=(f_1,\dots,f_n)^T$, $\bar{x}=(x_1,\dots,x_n)$, $\int_{\bar{\gamma}}(f_1,\dots,f_n)\cdot d(x_1,\dots,x_n)$

$$=\int_{\bar{\gamma}} f_1\,dx_1+\int_{\bar{\gamma}} f_2\,dx_2+\dots+\int_{\bar{\gamma}} f_n\,dx_n$$

π.χ. $\int_C \underbrace{x\,dx+y\,dy}_{(x,y)\cdot d(x,y)}=I$, C: κύκλος, ακτ. r, κέντρου $(0,0)$ θετικά προσαν.

$C=\bar{\gamma}([0,2\pi])$ || Άρα $I=\int_0^{2\pi}(r\cos t, r\sin t)\cdot$

$\bar{\gamma}(t)=(\cos t,\sin t)$ $\quad \cdot(-r\sin t, r\cos t)\,dt=$

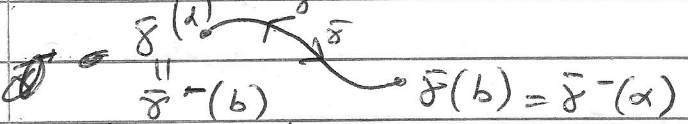
$$=\int_0^{2\pi} r^2\,0\,dt=0.$$

Σε αντίθεση με τα επικ. ολ/τα ως προς μήκος καμπύλης (πραγμ. συνάρτ.)

[Η ΤΙΜΗ ΕΠΙΚ. ΟΛ/ΤΩΝ ΔΙΑΝ/ΚΩΝ ΠΕΔΙΩΝ ΕΞΑΡΤΑΤΑΙ ΑΠΟ ΤΟΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟ ΤΗΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ].

Πρόταση: Έστω $\bar{\gamma}:[\alpha,b]\to\mathbb{R}^n$, C^1, $\bar{f}:\bar{\gamma}([\alpha,b])\to\mathbb{R}$ συνεχής $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{\bar{\gamma}^-}\bar{f}\cdot d\bar{x}=-\int_{\bar{\gamma}}\bar{f}\cdot d\bar{x},$$ όπου $\bar{\gamma}^-=\bar{\gamma}(\alpha+b-t)$ η αντιστροφή της $\bar{\gamma}$, $t\in[\alpha,b]$.



Απόδ: $$\int_\alpha^b \bar{f}(\underbrace{\bar{\gamma}^-(t)}_{\bar{\gamma}(\alpha+b-t)})\cdot\underbrace{(\bar{\gamma}^-)'(t)}_{-\bar{\gamma}'(\alpha+b-t)}\,dt=-\int_\alpha^b \bar{f}(\bar{\gamma}(\overbrace{\alpha+b-t}^{\tau}))\,\bar{\gamma}'(\overbrace{\alpha+b-t}^{\tau})\,dt=$$

$$=\int_b^\alpha f(\bar{\gamma}(\tau))\cdot\bar{\gamma}'(\tau)\,d\tau=-\int_\alpha^b \bar{f}(\bar{\gamma}(\tau))\cdot\bar{\gamma}'(\tau)\,d\tau$$

Κατά τα άλλα ένα επικ. ολ/μα δίκου πεδίου είναι αναλλοίωτο κάτω από C^1 παραμ. μετασχ. που διατηρεί τον προσανατολισμό.

Πρόταση: Έστω $\bar{\gamma}:[\alpha,b]\to\mathbb{R}^n$ C^1, $\bar{f}:\bar{\gamma}([\alpha,b])\to\mathbb{R}$ συνεχής και $\varphi:[A,B]\to[\alpha,b]$ C^1 παρ. μετασχ. που διατηρεί τον προσανατ. δηλ. $\varphi'(\tau)>0, \forall \tau\in[A,B]$. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{\bar\gamma\circ\varphi} \bar f\cdot d\bar x = \int_{\bar\gamma}\bar f\cdot d\bar x$$

Απόδ: $$\int_A^B \underbrace{\bar f(\bar\gamma(\varphi(\tau)))\cdot\bar\gamma'(\overbrace{\varphi(\tau)}^{t})}_{g(\varphi(\tau))}\varphi'(\tau)\,d\tau = \int_a^b \bar f(\bar\gamma(t))\cdot\bar\gamma'(t)\,dt$$

Ιδιότητες: (α) $\int_{\bar\gamma}(\lambda\bar f+\mu\bar g)\cdot d\bar x = \lambda\int_{\bar\gamma}\bar f\cdot d\bar x+\mu\int_{\bar\gamma}\bar g\, d\bar x$

(β) $\int_{\bar\gamma_1\oplus\bar\gamma_2}\bar f\cdot d\bar x = \int_{\bar\gamma_1}\bar f\cdot d\bar x + \int_{\bar\gamma_2}\bar f\cdot d\bar x$

(γ) $\left|\int_{\bar\gamma}\bar f\cdot d\bar x\right| \le \|\bar f\|_\infty L(\bar\gamma)$ με $\|f\|_\infty = \max\{\|\bar f(\bar x)\|, \bar x\in\bar\gamma([a,b])\}$.

$$\le \int_a^b |\bar f(\bar\gamma(t))\cdot\bar\gamma'(t)|\,dt$$

$$\le \|\bar f(\bar\gamma(t))\|\,\|\bar\gamma'(t)\|$$

$$\le \|\bar f\|_\infty$$

Παράδειγμα: Υπολ. τα επικ. ολοκλ.: $\int_{C_i}(y, x-y)\cdot d(x,y)$

και $\int_{C_i}(y, y-x)\cdot d(x,y)$, $i=1,2,3$ όπου $C_i\subseteq\mathbb{R}^2$ οι κατά τμήματα C^1 απλές καμπύλες που δίνονται ως εξής

(α) C_1: πολυγ. γραμμή που ενώνει κατά σειρά τα (0,0), (0,1), (1,1)

(β) C_2: -//- -//- -//- : (0,0), (1,0), (1,1)

(γ) C_3: το τμήμα της παραβολής $y=x^2$ από το σημείο $(0,0)\to(1,1)$

Ορισμός: $\bar\gamma = \bar\gamma_1\oplus\ldots\oplus\bar\gamma_k : [a,b]\to\mathbb{R}^n$ κατά τμήματα C^1 καμπύλη και $\bar f:\bar\gamma([a,b])\to\mathbb{R}^n$ συνεχής. Τότε θα ορίσουμε:

$$\int_{\bar\gamma}\bar f\cdot d\bar x = \sum_{i=1}^{n}\int_{\bar\gamma_i}\bar f\cdot d\bar x$$ και

αν $\bar\gamma$: απλή γράφουμε: $\int_C \bar f\cdot d\bar x$